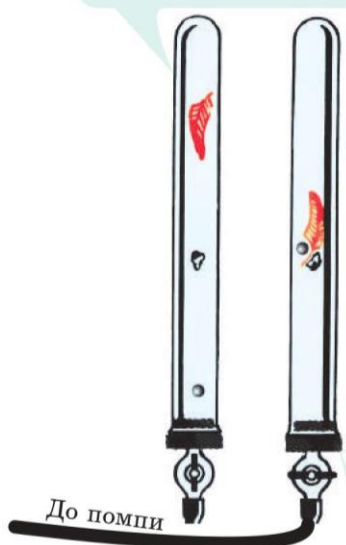




§ 7. ВІЛЬНЕ ПАДІННЯ І КРИВОЛІНІЙНИЙ РУХ ПІД ДІЄЮ НЕЗМІННОЇ СИЛИ ТЯЖІННЯ



Якщо трубку швидко перевернути, першою впаде на дно сталеву кулька, потім — корок, а останнім — пташине перо



Якщо з трубки відкачати повітря, усі три тіла впадуть на дно трубки одночасно

Рис. 7.1. Демонстрація вільного падіння тіл в трубці Ньютона

1. Зі збільшенням висоти $\vec{g}$ зменшується



2. Земля обертається

3. Рухові тіл заважає опір повітря

Рис. 7.2. Фактори, які ускладнюють описання падіння тіл

«Людина — гарматне ядро» — цирковий номер із такою назвою вперше був показаний 1877 р. у Лондоні. 16-річну повітряну гімнастку помістили в дуло «гармати», здійснили постріл, і дівчина, пролетівши над головами захоплених глядачів, опустилася на страхувальну сітку. Сучасні аналогічні «гармати» — це величезні пневматичні пістолети. Як вони працюють, пропонуємо вам дізнатися самостійно, а зараз розглянемо, на які закони спираються творці подібних атракціонів.

1 Згадуємо вільне падіння

Аристотель стверджував: чим тіло важче, тим швидше воно падає на Землю. Проте ви знаєте: так буде, якщо рух приблизно однакових за розміром тіл відбуватиметься в повітрі, а от у разі відсутності повітря всі тіла — незалежно від їхньої маси, об'єму, форми — падають на Землю однаково (рис. 7.1).

Падіння тіл у безповітряному просторі, тобто падіння лише під дією сили тяжіння, називають **вільним падінням**.

У разі вільного падіння всі тіла падають на Землю з однаковим прискоренням — *прискоренням вільного падіння* ($\vec{g}$).

- Вектор прискорення вільного падіння завжди напрямлений вертикально вниз.

- Прискорення вільного падіння вперше виміряв нідерландський математик, астроном і фізик *Крістіан Гюйгенс* (1629–1695) у 1656 р. Поблизу поверхні Землі, тобто на невеликій (порівняно з радіусом Землі) відстані, воно є практично незмінним і приблизно дорівнює $9,8 \text{ м/с}^2$.

2 Вільне падіння яких тіл розглядатимемо

Характер реального руху тіла в полі тяжіння Землі є досить складним (рис. 7.2), і його описування виходить за межі шкільної програми. Тому приймемо низку *спрощень*.

- Систему відліку, пов'язану з точкою на поверхні Землі, вважатимемо *інерціальною* (про інерціальні системи ви згадаєте в § 9).

- Розглядатимемо рух тіл, що перебувають поблизу поверхні Землі. Тоді кривизною поверхні Землі та зміною прискорення вільного падіння можна знехтувати, а *прискорення вільного падіння вважати незмінним*.

Розв'язуючи задачі, вважатимемо, що $g = 10 \text{ м/с}^2$, якщо не зазначено інше.

- *Опором повітря будемо нехтувати*. Це спрощення не спричинить серйозного викривлення результатів тільки тоді, коли *тіла досить важкі, невеликі за розмірами, а швидкість їхнього руху досить мала*. Саме такі тіла розглядатимемо далі.

? Візьміть книжку, аркуш паперу, гумку, олівець і зясуйте, як рух повітря впливає на їх падіння.

3 Як рухається тіло, кинуте вертикально

Спостерігаючи за рухом невеликих важких тіл, які кинуті вертикально вниз чи вертикально вгору або які падають без початкової швидкості, бачимо, що траєкторія їх руху — відрізок прямої. До того ж ці тіла рухаються з незмінним прискоренням.

Рух тіла, кинутого вертикально вгору або вниз, — це рівноприскорений прямолінійний рух із прискоренням, що дорівнює прискоренню вільного падіння:

$$\vec{a} = \vec{g}$$

Згадаємо формули, які описують рівноприскорений прямолінійний рух, врахуємо, що в ході описання руху тіла по вертикалі вектори швидкості, прискорення та переміщення традиційно проєктують на вісь OY , й отримуємо низку формул, якими описують вільне падіння тіл (див. таблицю).

Задача 1. Із гелікоптера, який висить над озером на висоті 45 м, скинули невеликий важкий предмет. 1) Через який інтервал часу предмет упаде в озеро? 2) Якою буде швидкість руху предмета в момент торкання води? 3) Визначте співвідношення переміщень предмета за будь-які рівні інтервали часу Δt .

Аналіз фізичної проблеми. Виконаємо пояснювальний рисунок (рис. 1). Спрямуємо вісь OY вертикально вниз. Початок координат нехай збігається з положенням тіла в момент початку падіння. Швидкість руху тіла в цей момент дорівнює нулю.

Формули для розрахунку кінематичних характеристик вільного падіння

Рівноприскорений рух уздовж осі OX	Вільне падіння уздовж осі OY
Проекція швидкості руху	
$v_x = v_{0x} + a_x t$	$v_y = v_{0y} + g_y t$
Проекція переміщення	
$s_x = v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}$	$s_y = h_y = v_{0y} t + \frac{g_y t^2}{2}$
$s_x = \frac{v_x + v_{0x}}{2} t$	$s_y = h_y = \frac{v_y + v_{0y}}{2} t$
$s_x = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x}$	$s_y = h_y = \frac{v_y^2 - v_{0y}^2}{2g_y}$
Рівняння координати	
$x = x_0 + v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}$	$y = y_0 + v_{0y} t + \frac{g_y t^2}{2}$

Дано:

$$v_0 = 0$$

$$s = h = 45 \text{ м}$$

$$g = 10 \text{ м/с}^2$$

t — ?

v — ?

$s_1 : s_2 : s_3 \dots$ — ?

Пошук математичної моделі, розв'язання

Запишемо рівняння проєкції переміщення і проєкції швидкості руху тіла:

$$s_y = h_y = v_{0y} t + \frac{g_y t^2}{2}; \quad v_y = v_{0y} + g_y t.$$

Конкретизуємо ці рівняння (перейдемо від проєкцій до модулів). Із рис. 1 бачимо:

$$s_y = s = h; \quad g_y = g; \quad v_{0y} = 0.$$

$$\text{Отже, маємо: } h = \frac{gt^2}{2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}; \quad v_y = gt.$$

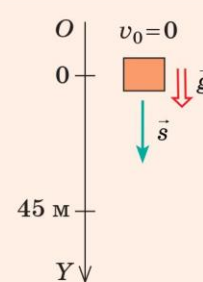


Рис. 1

Перевіримо одиниці, знайдемо значення шуканих величин:

$$[t] = \sqrt{\frac{\text{м}}{\text{м}/\text{с}^2}} = \sqrt{\frac{\text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{м}}} = \text{с}, \quad t = \sqrt{\frac{2 \cdot 45}{10}} = 3 \text{ (с)}; \quad v = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot 3 \text{ с} = 30 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Для відповіді на запитання 3 скористаємося геометричним змістом переміщення (рис. 2). Вільне падіння тіл є рівноприскореним прямолінійним рухом, тому графік залежності $v_y(t)$ — це відрізок прямої, який починається в точці $(t=0, v_y=0)$.

Бачимо, що за перший інтервал часу Δt переміщення тіла чисельно дорівнює площі S_0 одного трикутника (площа фігури під графіком): $s_1 = 1S_0$; за другий інтервал часу Δt — площі трьох трикутників: $s_2 = 3S_0$; за третій інтервал часу Δt — площі п'яти трикутників: $s_3 = 5S_0$ і т. д.

Відповідь: $t = 3 \text{ с}$; $v = 30 \text{ м/с}$; $s_1 : s_2 : s_3 : s_4 \dots = 1 : 3 : 5 : 7 \dots$.

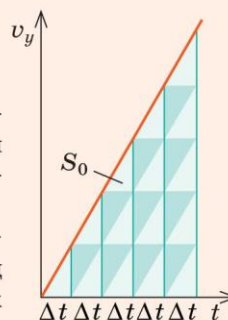


Рис. 2

Під час вільного падіння без початкової швидкості переміщення тіла за рівні послідовні інтервали часу відносяться як непарні числа:

$$s_1 : s_2 : s_3 : s_4 \dots = 1 : 3 : 5 : 7 \dots$$

Ця властивість стосується будь-якого рівноприскореного прямолінійного руху тіла. Наприклад, якщо за першу секунду тіло пододало 5 м, за другу воно подолає $3 \cdot 5 = 15$ м, за третю — $5 \cdot 5 = 25$ м, за четверту — $7 \cdot 5 = 35$ м і т. д.

4 Що падає швидше

Уявімо, що з моста в горизонтальному напрямку кинули каштан і в ту саму мить випустили з руки другий каштан. Який каштан упаде у воду швидше? Насправді обидва каштани, якщо їм нічого не завадить, упадуть у воду одночасно.

Отже, рухові тіла у вертикальному напрямку не «заважає» його рух у горизонтальному напрямку, і навпаки. Тут ми зустрілися з проявом принципу незалежності рухів, відповідно до якого будь-який складний рух можна розглядати як «суму» двох (або більше) простих рухів.

Скориставшись спеціальним пристроєм і відеокамерою мобільного телефона, можемо легко підтвердити це (рис. 7.3).

Штовхач надає кульці 2 горизонтальної швидкості. У той самий час кулька 1 звільняється і починає падати вертикально

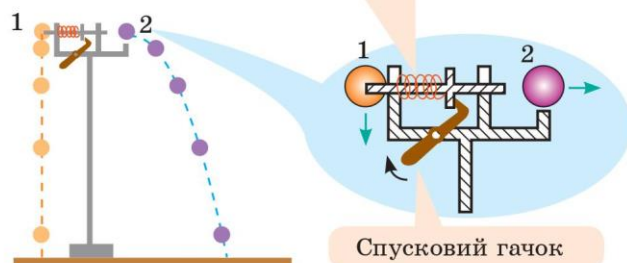


Рис. 7.3. Кулька 1, яка вільно падає без початкової швидкості, і кулька 2, кинуто горизонтально, весь час перебувають на однаковій висоті й на Землю падають одночасно

5 Рух тіл, кинутих горизонтально або під кутом до горизонту

Скориставшись принципом незалежності рухів, розглянемо рух тіла, якому поблизу поверхні Землі надано певної не вертикальної швидкості. Нагадаємо, що опір повітря вважатимемо нехтовно малим, тобто рух відбувається лише під дією сили тяжіння з прискоренням $\vec{g}$. Такий рух зручно розглядати як результат додавання двох незалежних рухів (рис. 7.4):

1) *горизонтального* — рівномірного уздовж осі OX (оскільки $g_x = 0$), який описується рівняннями:

$$v_x = v_{0x}; \quad x = x_0 + v_{0x}t;$$

2) *вертикального* — рівноприскореного (з прискоренням $\vec{g}$) уздовж осі OY , який описується рівняннями:

$$v_y = v_{0y} + g_y t; \quad y = y_0 + v_{0y}t + \frac{g_y}{2} t^2.$$

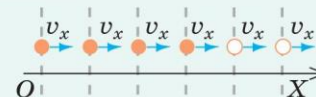
• Модуль і напрямок швидкості руху тіла в довільній точці траєкторії визначаємо, скориставшись теоремою Піфагора та означенням тангенса (див. рис. 7.4):

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{v_y}{v_x}.$$

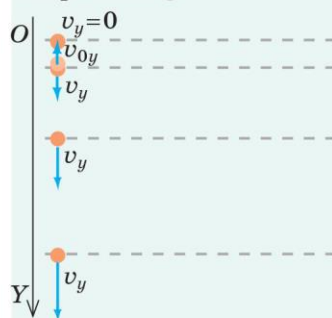
• Якщо з рівняння $x = x_0 + v_{0x}t$ знайти t і підставити одержаний вираз у рівняння $y = y_0 + v_{0y}t + \frac{g_y}{2} t^2$, отримаємо рівняння траєкторії руху тіла, яке має вигляд квадратичної функції: $y(x) = Ax^2 + Bx + C$.

Таким чином, траєкторія руху тіла, якому поблизу поверхні Землі надано початкової швидкості, є параболічною (рис. 7.5).

Горизонтальний рух — швидкість руху не змінюється



Вертикальний рух — рівноприскорений рух із прискоренням $\vec{g}$



Складний рух

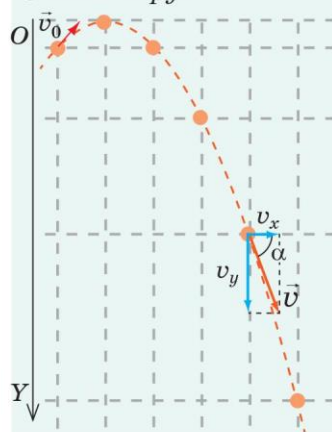


Рис. 7.4. Додавання вертикального і горизонтального рухів тіла. Положення тіла подано через рівні інтервали часу

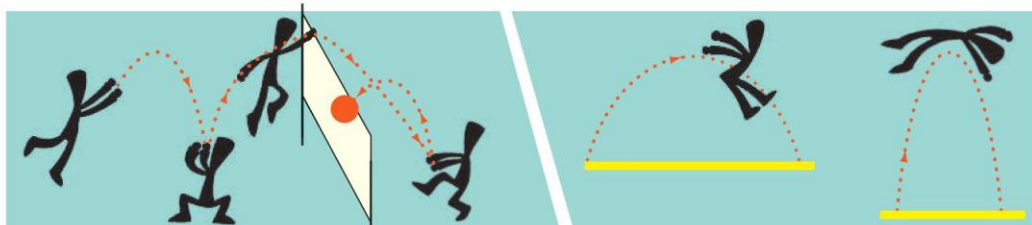


Рис. 7.5. Траєкторія руху тіла, якому надано швидкість, що напрямлена горизонтально або під кутом до горизонту, є параболічною, а її кривизна залежить від модуля і напрямку цієї швидкості

6 Рух тіла, кинутого горизонтально

Задача 2. Мотоцикліст, що рухався горизонтально гірською дорогою зі швидкістю 15 м/с, не загальмував перед поворотом, і його мотоцикл упав з висоти 20 м у сніговий замет. 1) Скільки часу падав мотоцикл? 2) Якою є горизонтальна дальність польоту мотоцикла? Як, на вашу думку, зміниться ця дальність у реальній ситуації? Опором повітря знехтувати.

Дано:

$$v_0 = 15 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

$$h = 20 \text{ м}$$

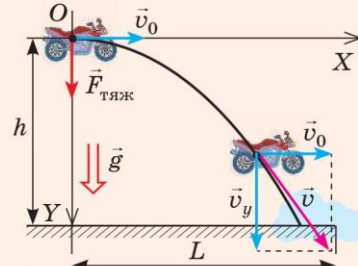
$$g = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

$$t = ?$$

$$L = ?$$

Розв'язання

Оберемо систему відліку: пов'яжемо початок координат із місцем, де мотоцикл почав падіння, вісь OY спрямуємо вертикально вниз, вісь OX — у напрямку початкової швидкості руху мотоцикла (див. [рисунок](#)).



В обраній системі відліку:

рух уздовж осі OX — рівномірний:

$$v_x = v_{0x}; \quad x = x_0 + v_{0x}t \quad (1)$$

рух уздовж осі OY — рівноприскорений:

$$v_y = v_{0y} + g_y t; \quad y = y_0 + v_{0y}t + \frac{g_y t^2}{2}. \quad (2)$$

Конкретизуємо отримані результати (див. [рисунок](#)):

$$v_{0x} = v_0; \quad x_0 = 0; \quad x = L$$

$$v_{0y} = 0; \quad y_0 = 0; \quad y = h.$$

Отже, рівняння (1) і (2) набувають вигляду:

$$v_x = v_0; \quad L = v_0 t$$

$$v_y = gt; \quad h = \frac{gt^2}{2}$$

Зверніть увагу! Виділені формули справедливі для описання руху будь-якого горизонтально кинутого тіла.

$$1) \text{ Визначимо час падіння мотоцикла: } h = \frac{gt^2}{2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}; \quad t = \sqrt{\frac{2 \cdot 20 \text{ м}}{10 \text{ м/с}^2}} = 2 \text{ с.}$$

$$2) \text{ Обчислимо дальність польоту: } L = v_0 t; \quad L = 15 \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot 2 \text{ с} = 30 \text{ м.}$$

Проаналізуємо результат. Очевидно, що в реальній ситуації дальність польоту буде меншою, адже рухові заважає опір повітря. Проте зрозуміло, це не означає, що падіння буде безпечнішим. *Будьте обережними й пильними на дорогах!*

Відповідь: $t = 2 \text{ с}$; $L = 30 \text{ м}$.



Рис. 7.6. За напрямком і дальністю польоту м'яча ви можете визначити, якої швидкості ви надали м'ячу під час удару або кидка

7 Рух тіла, кинутого під кутом до горизонту

Прочитавши про рекорди швидкості польоту спортивних снарядів, учениця вирішила з'ясувати, якої швидкості вона надає футбольному м'ячу. Для цього дівчинка вдарила по м'ячу, спрямувавши його під кутом 45° до горизонту (див. [рис. 7.6](#)). М'яч упав на землю на відстані 40 м від учениці. Виконавши розрахунки, дівчинка вирішила, що вона надала м'ячу швидкості 20 м/с, а м'яч піднявся на висоту 8 м. Чи не помилилася учениця?

? Ознайомтеся з розв'язанням аналогічної задачі в загальному вигляді (див. нижче). Скориставшись отриманими формулами, оцініть розрахунки дівчинки, а після уроків проведіть подібний експеримент та оцініть швидкість, якої ви надаєте м'ячу.

Задача 3. Футболістка вдарила по м'ячу, надавши йому швидкості v_0 , напрямленої під кутом α до горизонту. Визначте дальність польоту та найбільшу висоту підйому м'яча.

Дано:

v_0

α

g

L — ?

$h_{\max}$ — ?

Розв'язання

Виконаємо пояснювальний рисунок (рис. 1):

початок координат пов'яжемо з точкою на поверхні Землі, де м'яч відірвався від бутси футболістки; вісь OY спрямуємо вертикально вгору; вісь OX — горизонтально.

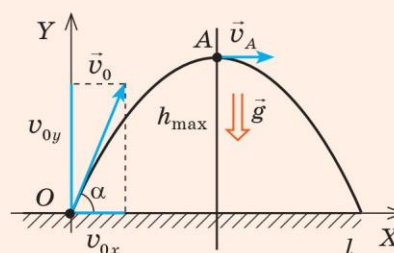


Рис. 1

В обраній системі відліку:

рух уздовж осі OX — рівномірний:

$$v_x = v_{0x}, \quad x = x_0 + v_{0x}t, \quad (1)$$

де $x_0 = 0$, $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$

рух уздовж осі OY — рівноприскорений:

$$v_y = v_{0y} + g_y t, \quad y = y_0 + v_{0y}t + \frac{g_y t^2}{2}, \quad (2)$$

де $y_0 = 0$, $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$, $g_y = -g$,

тому рівняння (1) і (2) набувають вигляду:

$$v_x = v_0 \cos \alpha, \quad x = v_0 \cos \alpha \cdot t$$

$$v_y = v_0 \sin \alpha - gt, \quad y = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$$

Час t_1 руху м'яча до верхньої точки траєкторії (точки A) знайдемо з умови $v_y(t_1) = 0$:

$$v_0 \sin \alpha - gt_1 = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}.$$

Координата y м'яча в точці A — це максимальна висота підйому м'яча:

$$h_{\max} = y_A = v_0 \sin \alpha \cdot t_1 - \frac{gt_1^2}{2}.$$

Після підстановки t_1 отримуємо формули для визначення максимальної висоти

підйому та загального часу руху м'яча: $h_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$; $t = 2t_1 = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$.

Дальність L польоту дорівнює координаті x тіла наприкінці руху ($x = L$):

$$x = v_0 \cos \alpha \cdot t = v_0 \cos \alpha \cdot \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}. \text{ Оскільки } 2 \cos \alpha \cdot \sin \alpha = \sin 2\alpha, \text{ то } L = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Зверніть увагу! З останньої формули випливає:

- якщо кинути тіло під кутом α , а потім під кутом $90^\circ - \alpha$, то дальність польоту не зміниться, тобто тіло потрапить у ту саму точку, рухаючись різними траєкторіями (рис. 2);
- максимальної дальності польоту тіло сягає, якщо $\alpha = 45^\circ$ ($\sin 2\alpha = 1$).

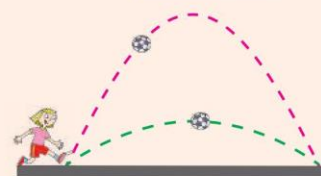


Рис. 2



Підбиваємо підсумки

- Падіння тіл у безповітряному просторі, тобто падіння лише під дією сили тяжіння, називають вільним падінням.
- У разі вільного падіння всі тіла падають на Землю з однаковим прискоренням — прискоренням вільного падіння ($\vec{g}$). Вектор прискорення вільного падіння завжди напрямлений вертикально вниз; за модулем $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ ($g \approx 10 \text{ м/с}^2$).
- Рух тіла, кинутого вертикально вгору або вниз, — це рівноприскорений прямолінійний рух із прискоренням, що дорівнює прискоренню вільного падіння: $\vec{a} = \vec{g}$.
- Траєкторія руху тіла, кинутого горизонтально або під кутом до горизонту, — параболічна. Такі рухи розглядають як результат додавання двох простих рухів: горизонтального — рівномірного уздовж осі OX і вертикального — рівноприскореного (з прискоренням $\vec{g}$) уздовж осі OY . При цьому рівняння залежностей проекції швидкості та координати від часу мають вигляд:

$$v_x = v_{0x}, \quad x = x_0 + v_{0x}t; \quad v_y = v_{0y} + g_y t, \quad y = y_0 + v_{0y}t + \frac{g_y t^2}{2}.$$



Контрольні запитання

1. Який рух називають вільним падінням тіл? Яким є характер цього руху?
2. Як напрямлене прискорення вільного падіння та чому воно дорівнює?
3. Запишіть у загальному вигляді рівняння руху тіла під дією сили тяжіння.
4. Який вигляд матимуть рівняння руху, якщо тіло кинуте вертикально? горизонтально? під кутом до горизонту?
5. Якою є траєкторія руху тіла, кинутого вертикально? горизонтально? під кутом до горизонту? Наведіть приклади.
6. Як визначити модуль і напрямок швидкості руху тіла в будь-якій точці траєкторії?



Вправа № 7

Опором повітря нехтуйте. Вважайте, що $g = 10 \text{ м/с}^2$.

1. Металеву кульку підняли на висоту 1,8 м над підлогою і відпустили. На якій висоті прискорення вільного падіння кульки буде найбільшим: а) на висоті 1,8 м; б) на висоті 1 м; в) у момент удару об підлогу? На якій висоті із зазначених буде найбільшою швидкість руху кульки? Визначте цю швидкість.
2. Стрілу випустили з лука вертикально вгору зі швидкістю 10 м/с. Відомо, що через 2 с вона вже падала вниз із тією самою швидкістю. Визначте максимальну висоту польоту, шлях і переміщення стріли протягом цих 2 с.
3. Струмін води, напрямлений під кутом 60° до горизонту, сягнув висоти 15 м.
 - 1) Знайдіть: а) швидкість витікання води; б) час польоту частинок струменя; в) дальність польоту частинок струменя.
 - 2) Якою буде дальність струменя, якщо спрямувати його під кутом 30° до горизонту?
 - 3) Чому струмін води розширюється?
4. Із гелікоптера, який перебував на висоті 45 м і рухався зі швидкістю 10 м/с, упав невеликий важкий предмет. Через який інтервал часу предмет упаде на землю? Якою буде швидкість руху предмета в цей момент? Розв'яжіть задачу для випадків, коли гелікоптер: 1) піднімається; 2) опускається; 3) рухається горизонтально.